ECOLE NATIONALE DES TECHNIQUES INDUSTRIELLES ET DES MINES DE DOUAI

CONCOURS d' ADMISSION 1976

EPREUVES ECRITES d' ADMISSIBILITE

MATHEMATIQUES

(Temps accordé : 4 Heures)

L'USAGE DES TABLES NUMERIQUES ET DES REGLES A CALCUL EST AUTORISE.

L'EMPLOI DE CALCULATRICE ELECTRONIQUE EST FORMELLEMENT INTERDIT.

Les deux problèmes sont indépendants

PREMIER PROBLEME

On considère les fonctions numériques f, g, et h, d'une variable réelle, définies respectivement par

$$x \longmapsto f(x) = \left[\frac{5}{9} \operatorname{Log} \frac{x}{3}\right] + \left[\frac{2}{9} \operatorname{Log} \frac{x^2 + 9}{18}\right] - \left[2 \operatorname{Arc\,tg} \frac{x}{3}\right] + \frac{\pi}{2}$$

$$x \longmapsto g(x) = f(x) - \operatorname{Log} x$$

$$x \longmapsto h(x) = e^{f(x)}$$

1°/ Quels sont les domaines de définition de f, g, et h ?
Trouver une racine, relativement simple, de l'équation f(x) = 0.

2°/ On désigne respectivement par C_1 et C_2 les graphes de f et h dans un repère orthonormé.

Montrer que la recherche des points d'inflexion et l'étude de la concavité de C_1 se ramènent à la détermination des deux racines réelles positives du polynôme :

$$- x^4 + 12 x^3 - 6 x^2 - 45$$

Vérifier que l'une de ces racines est comprise entre 1 et 2 et l'autre entre 11 et 12.

3°/ Déterminer la limite γ de g(x) quand x tend vers $+\infty$.

Etablir le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $x \longmapsto g(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Même question pour la fonction $x \longmapsto e^{g(x)}$.

4°/ Etablir les tableaux de variation de f et h et tracer leurs courbes représentatives C_1 et C_2.

5°/ Soit $\Gamma(u)$ l'intégrale définie

$$\Gamma(u) = \int_3^u [g(x) - \gamma]\, dx \qquad (u > 0)$$

γ ayant été déterminé en 3°/

Calculer $\Gamma(u)$.

Trouver la constante a pour que l'expression

$$\Gamma(u) - a \operatorname{Log} u$$

ait une limite finie lorsque $u \to +\infty$.

Quelle est cette limite ?

ECOLE DES MINES DE DOUAI 1976 -I59-

DEUXIEME PROBLEME

Soit $\phi_k : x \longmapsto e^{kx}$, fonction numérique de la variable réelle x dans laquelle k est un entier positif ou nul. On désigne par B_{n+1} l'ensemble des (n+1) fonctions ϕ_k quand k prend toutes les valeurs de 0 à n. On appelle E_{n+1} l'ensemble des combinaisons linéaires des fonctions ϕ_k de B_{n+1} :

$$E_{n+1} = \{ \phi \mid \phi = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k \ , \ a_k \in \mathbb{R} \}$$

I

1°/ Déterminer les fonctions numériques, de la variable réelle x, solutions des équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 4y' + 3y = 0$

b) $y'' - 4y' + 3y = e^{2x} + 1$

c) $y'' - 4y' + 3y = e^{x} + 1$

2°/ On désigne par g une primitive de la fonction : $x \longmapsto e^{(-e^x - 2x)}$

On ne demande pas de calculer g(x).

Exprimer, en fonction de g, l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

a) $y' - 2y = e^{(-e^x)}$

b) $e^{-x} y'' + (1 - 2e^{-x}) y' - 2y = 0$.

II

1°/ Montrer que l'ensemble E_3 des fonctions numériques ϕ :

$$E_3 = \{ \phi \mid \phi = a_o \phi_o + a_1 \phi_1 + a_2 \phi_2 \ , \quad (a_o, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \}$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et que $B_3 = \{ \phi_o , \phi_1 , \phi_2 \}$ est une base de E_3.

2°/ Montrer que $f : \phi \longmapsto \phi'' - 4\phi' + 3\phi$ est une application linéaire de E_3 dans E_3. Déterminer le noyau de cette application linéaire.

Donner toutes les fonctions ϕ de E_3 dont l'image par f est la fonction $h : x \longmapsto e^{2x} + 1$. L'ensemble des fonctions ϕ trouvées est-il un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

Donner toutes les fonctions ϕ de E_3 dont l'image par f est la fonction $k : x \longmapsto e^{x} + 1$.

3°/ L'application $u : \phi \longmapsto u(\phi)$ telle que

$$u(\phi)(x) = e^{-x} \phi''(x) + (1 - 2e^{-x}) \phi'(x) - 2\phi(x)$$

est-elle une application linéaire de E_3 dans E_3 ?

Quelle est la matrice de u relativement à la base $B_3 = \{ \phi_o , \phi_1 , \phi_2 \}$? u est-elle bijective ? Déterminer le noyau de u et la dimension de ce noyau. Déterminer $u(E_3)$ et sa dimension.

III

1°/ Montrer que E_{n+1} est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Montrer que l'application $v : \phi \longmapsto v(\phi) = \phi' - p\phi$, dans laquelle p désigne un entier au moins égal à 1 est une application linéaire de E_{p+1} dans E_p.

En utilisant la question précédente, montrer que, si B_p ($p \geqslant 1$) est un système libre, il en est de même de B_{p+1}. Quelle est la dimension de E_{n+1} ?

2°/ Soit l'application $w : \phi \longmapsto w(\phi)$ définie par :

$$w(\phi)(x) = e^{-x} \phi'(x) + \phi(x)$$

Montrer que w est une application linéaire de E_{n+1} dans E_{n+1}. Quelle est la matrice A de w relativement à la base B_{n+1} ? L'application w est-elle bijective ?

Déterminer la fonction ϕ de E_{n+1} dont l'image par w est ϕ_n.

Déterminer la fonction ϕ de E_{n+1} dont l'image par w est ϕ_k, k étant un entier donné tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail